Composition harmonisée du premier semestre : **Epreuve**: mathématique **durée :** 04 heures

NB: La qualité de la rédaction, la clarté et la précision seront tenues en compte dans la correction. Toute réponse ambigüe sera considérée comme une absence de réponse.

Exercice 1 : (03 points)

1. a. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires. **(0,5pt)**
   b. Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ admet trois solutions distinctes. **(1pt)**
2. a. Enoncer le théorème de l'inégalité des accroissements finis. **(0,5pt)**
   b. Montrer que pour tout x de$\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $|\cos(x) - 1| < |x|$. **(1pt)**

Exercice 2 : (02 points)

On rapelle les formules d'addition suivantes : $\begin{cases} cox(a+b) = cosacosb - sinasinb \\ \cos(a-b) = cosacob + sinasinb \end{cases}$

1. Déduire de ces relations la valeur de $sinasinb$. **(0,5pt)**

2. considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sinxsin2x$

a. A l'aide des formules d'Euler, montrer que la fonction f peut s'écrire : $f(x) = \frac{1}{2}(cosx - cos3x)$ **(1pt)**

b. Déduire de ce qui précède la primitive F de $\boldsymbol{f}$ **telle** $\boldsymbol{F}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \mathbf{0}$ **(0,5pt)**

Exercice 3 : (06 points)

Questions de cours : Rappeler les formes algébrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe z non nul. **(0,25pt× 3)**

1. Calculer$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$. En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $z^2 - i = 0$. **(0,5+0,5pt)**
2. On pose $P(z) = z^3 + z^2 - iz - i$ où z est un nombre complexe.
   a. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera. **(0,75pt)**
   b. Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes. (0,75pt)
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

   On considère les points A, B et C d'affixes respectives$z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $z_C = -1$
   a. Déterminer la forme exponentielle de z_A et celle de z_B. **(0,5pt)**
   b. Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe. **(0,75pt)**
4. Soit D le symetrique du point A par rapport à l'axe réel.
   a. Donner l'affixe z_D du point D sous forme algébrique. **(0,5pt)**
   b. Démontrer que $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la nature du triangle ACD. **(0,5pt+0,5pt)**

Problème : (09 points)

On considère la fonction numérique à variable réelle f donnée par : $f(x) = x\sqrt{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}$.

On note par (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner l'ensemble de définition D_f de f. **(0,5pt)**
2. Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue. **(0,75pt)**
3. a. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f. **(4×0,25pt)**

   (On interprétera si nécessaire les résultats obtenus) **(0,25pt)**

   b. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$. **(0,75pt)**
4. a. Etudier la continuité de f en 1. **(0,25pt)**

   b. Etudier la dérivabilité de f en 1. **(0,5pt)**

   Donner l'interprétation graphique des résultats obtenus. **(0,25pt)**
5. a. Expliciter $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. **(0,5pt)**

   b. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;1[$. **(0,5pt)**
6. Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. **(0,75pt)**
7. Dresser le tableau de variation de f. **(1pt)**
8. Construire (C_f). **(0,75pt)**

   NB : (C_f) est en dessous de son asymptote sur $]-\infty;-1[$ et au-dessus de celle-ci sur $]1;+\infty[$.
9. On note par g la restriction de f à $I =]1;+\infty[$.

   a. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser. **(0,5pt)**

   b. Calculer $g(2)$ puis $(g^{-1})'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. **(0,25pt+0,5pt)**